**ĐỀ CƯƠNG ÔN TẬP**

**BÀI THI TOÁN CAO CẤP**

**1. Hàm số một biến số thực**

1.1. Hàm số, giới hạn và tính liên tục

+ Hàm số: các khái niệm cơ bản

+ Giới hạn của hàm số: Định nghĩa, tính chất, vô cùng bé, vô cùng lớn

+ Tính liên tục của hàm một biến, phân loại điểm gián đoạn.

1.2. Phép tính vi phân của hàm một biến

+ Đạo hàm và vi phân cấp một, ứng dụng vi phân tính gần đúng.

+ Đạo hàm và vi phân cấp cao, quy tắc L'hospital, khai triển Taylor, khai triển Maclaurin.

1.3. Phép tính tích phân của hàm một biến

+ Tích phân bất định.

+ Tích phân xác định, ứng dụng tính thể tích, diện tích.

+ Tích phân suy rộng: Định nghĩa, các quy tắc xét sự hội tụ.

**2. Hàm số nhiều biến số thực**

2.1. Hàm số nhiều biến, giới hạn và tính liên tục của hàm nhiều biến.

+ Khái niệm hàm nhiều biến, định nghĩa giới hạn, tính liên tục và các tính chất.

2.2. Đạo hàm riêng và vi phân toàn phần của hàm nhiều biến. Ứng dụng vi phân toàn phần vào tính gần đúng.

2.3. Đạo hàm của hàm hợp và hàm ẩn.

2.4. Đạo hàm và vi phân cấp cao.

2.5. Cực trị (không điều kiện) của hàm nhiều biến.

2.6. Tích phân hàm nhiều biến

+ Tích phân hai lớp, các công thức đổi biến.

+ Tích phân ba lớp, các công thức đổi biến.

+ Tích phân đường loại một, tích phân đường loại hai, công thức Green, định lý bốn mệnh đề tương đương.

+ Tích phân mặt loại một, tích phân mặt loại hai, công thức Ostrogradski.

**3. Lý thuyết chuỗi**

3.1. Chuỗi số

+ Định nghĩa, tính chất.

+ Chuỗi số dương và các tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương.

+ Chuỗi có dấu tùy ý, chuỗi đan dấu, tiêu chuẩn Leibniz.

3.2. Chuỗi hàm

+ Khái niệm, miền hội tụ.

+ Chuỗi lũy thừa.

**4. Phương trình vi phân**

4.1. Phương trình vi phân cấp một

+ Phương trình khuyết, phương trình phân li biến số, phương trình thuần nhất, phương trình vi phân toàn phần.

+ Phương trình tuyến tính cấp một, phương trình Bernoulli, phương trình Lagrange, phương trình Clairaut.

4.2. Phương trình vi phân cấp hai

+ Phương trình tuyến tính thuần nhất cấp hai với hệ số hằng.

+ Phương trình tuyến tính không thuần nhất cấp hai với hệ số hằng.

**5. Đại số tuyến tính**

5.1. Ma trận và các phép toán trên ma trận

5.2. Định thức và cách tính định thức

5.3. Hệ phương trình tuyến tính

+ Hệ phương trình Cramer.

+ Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất.

+ Hệ phương trình tuyến tính tổng quát.

**6. Tài liệu tham khảo:**

- Toán cao cấp (tập 1, tập 2, tập 3), Nguyễn Đình Trí chủ biên, NXB Giáo dục, năm 2006.

- Bài tập Toán cao cấp (tập 1, tập 2, tập 3), Nguyễn Đình Trí chủ biên, NXB Giáo dục, năm 2006.

## MỘT SỐ BÀI TẬP THAM KHẢO BÀI THI TOÁN CAO CẤP

# 1. HÀM SỐ MỘT BIẾN SỐ THỰC

## 1.1. Đạo hàm, vi phân

**Bài 1**. Xét tính khả vi của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} arctan\, x & \text{khi} \quad |x| \le 1 \\ \dfrac{\pi}{4} sgn\, x + \dfrac{x-1}{2} & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$$

**Hướng dẫn giải**

Ta có:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & |x| < 1 \\ \dfrac{1}{2} & |x| > 1 \end{cases}$$

+ Kiểm tra tính khả vi tại $x = 1$. Ta có:

$$f'_+(1) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2} - \frac{\pi}{4}}{x-1} = \frac{1}{2};$$

$$f'_-(1) = \lim_{x\to 1^-} \frac{arctan\, x - \frac{\pi}{4}}{x-1} = arctanx'(1) = \frac{1}{2}$$

Do đó $f'(1) = \frac{1}{2}$

+ Kiểm tra tính khả vi tại $x = -1$:

$$f'_+(-1) = \lim_{x\to -1^+} \frac{arctan\, x + \frac{\pi}{4}}{x+1} = arctanx'(-1) = \frac{1}{2};$$

$$f'_-(-1) = \lim_{x\to -1^-} \frac{-\frac{\pi}{4} - \frac{x-1}{2} - \frac{\pi}{4}}{x+1} = +\infty$$

Suy ra $f$ không khả vi tại $x = -1$.

**Bài 2.** Xét tính khả vi của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{-x^2} & \text{khi} \quad |x| \le 1 \\ \dfrac{1}{e} & \text{khi } |x| > 1 \end{cases}$$

**Bài 3.** Xét tính khả vi của hàm số:

$$f(x) = \begin{cases} arctan\dfrac{1}{|x|} & \text{khi} \quad x \neq 0 \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{khi} \quad x = 0 \end{cases}$$

**Bài 4.** Xác định các giá trị $a, b, c$ để hàm số khả vi trên R:

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & \text{khi } |x| < 1 \\ \dfrac{1}{|x|} & \text{khi } |x| \geq 1 \end{cases}$$

**Hướng dẫn giải**

+ Với $\forall x \neq \pm 1$, hàm số $f(x)$ luôn khả vi, ta chỉ cần tìm điều kiện của a và b để hàm số khả vi tại $x = \pm 1$

+ Hàm số khả vi tại $x = \pm 1 \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = \pm 1$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to +1} f(x) = f(\pm 1) \Leftrightarrow a + b = 1 \Rightarrow a = 1 - b$$

+ Tại $x = 1$, ta có

$$f_{+}^{'}(1) = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = -1$$

$$f_{+}^{'}(1) = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^{+}} \frac{1 - x}{x(x - 1)} = -1$$

Vậy với $b = -\frac{1}{2}; a = \frac{3}{2}$ thì hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = 1$

+ Tại $x = -1$, ta có

$$f_{-}^{'}(-1) = \lim_{x \to -1^{-}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1^{-}} \frac{-\frac{1}{x} - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1^{-}} \frac{-(1 + x)}{x(x + 1)} = 1$$

$$f_{+}^{'}(-1) = \lim_{x \to -1^{+}} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \to -1^{+}} \frac{a + bx^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \to -1^{+}} \frac{bx^2 - b}{x + 1} = -2b$$

Vậy với $b = -\frac{1}{2}; a = \frac{3}{2}$ thì hàm số $f(x)$ khả vi tại $x = -1$.

**Bài 5.** Xác định các giá trị $a, b, c$ để hàm số khả vi trên R:

$$f(x) = \begin{cases} 4x & \text{khi} x \leq 0 \\ ax^2 + bx + c & \text{khi} 0 < x < 1 \\ 3 - 2x & \text{khi} x \geq 1 \end{cases}$$

**Bài 6.** Tìm khai triển Maclaurin của hàm số

$$f(x) = ln(x^2 + 3x + 2)$$

**Hướng dẫn giải**

+ Do khai triển Maclaurin là khai triển Taylor trong lân cận điểm $x = 0$ nên ta chỉ xét $x$ trong lân cận của 0 sao cho $x + 1 > 0, x + 2 > 0$.

+ Biến đổi

$$f(x) = ln(x^2 + 3x + 2) = ln(x+1)(x+2) = ln(x+1) + ln(x+2)$$

+ Áp dụng khai triển cơ bản

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

+ Ta được :

$$\begin{aligned} ln(2+x) &= ln\,2\left(1+\frac{x}{2}\right) \\ &= ln\,2 + \frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{n} + o(x^n \\ &= ln\,2 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{x^k}{2^k k} + o(x^n) \end{aligned}$$

+ Từ đó

$$ln(x^2 + 3x + 2) = ln\,2 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\left(1+\frac{1}{2^k}\right)\frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

**Bài 7.** Tìm khai triển Maclaurin của hàm số

$$f(x) = ln\frac{3+x}{2-x}$$

**Bài 8.** Tìm khai triển Maclaurin của hàm số

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

## 1.2. Tích phân và ứng dụng

### 1.2.1. Tích phân xác định

**Bài 1.** Tính

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 - \cos 2x}\, dx$$

**Hướng dẫn giải**

+ Viết $I$ dưới dạng:

$$I = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 x}\, dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}|\sin x| dx$$

+ Dựa vào sự biến thiên của hàm sin $(x)$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ ta có:

$$I = \sqrt{2}\int_0^{\pi} \sin x\, dx - \sqrt{2}\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\, dx = -\sqrt{2}\cos x|_0^{\pi} + \sqrt{2}\cos x|_{\pi}^{2\pi} = 4\sqrt{2}$$

**Bài 2.** Tính tích phân xác định

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$$

**Bài 3.** Tính tích phân xác định

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{xdx}{x^2 + x + 1}$$

**Bài 4.** Tính tích phân xác định

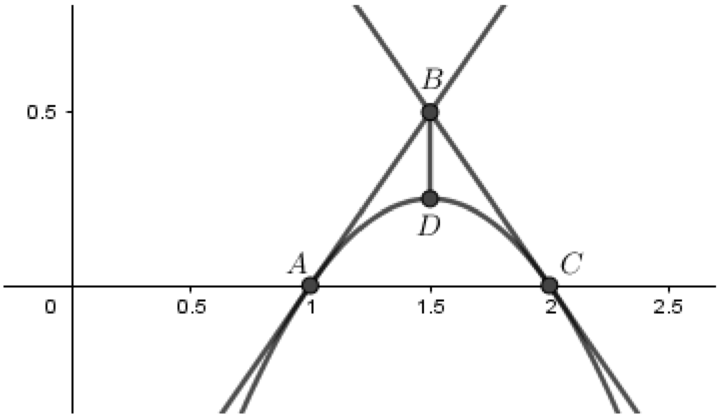
$$I = \int_0^{\pi} e^x \cos^2 x\, dx$$

### 1.2.2. Ứng dụng tích phân

**Bài 1.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = -x^2 + 3x - 2$ , $y = x - 1$ và $y = 2 - x$.

**Hướng dẫn giải**

+ Vẽ hình xác định hình phẳng cần tính diện tích




+ Gọi A là giao điểm của $y = -x^2 + 3x - 2$ và $y = x - 1$; B là giao điểm của $y = x - 1$ và $y = 2 - x$; C là giao điểm của $y = -x^2 + 3x - 2$ và $y = 2 - x$.

+ Tìm được tọa độ:$A(1,0)$; $B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$; $C(2,0)$. Đường thẳng $x = 3/2$ cắt cung $AC$ tại điểm $D\left(\frac{3}{2};0\right)$.

+ Diện tích hình phẳng cần tìm là diện tích tam giác cong ABC, ta có

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{BCD}$$

+ Tính diện tích tam giác cong ABD.

$$S_{ABD} = \int_1^{\frac{3}{2}} [x - 1 - (-x^2 + 3x - 2)]dx = \int_1^{\frac{3}{2}} (x^2 - 2x + 3)dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Bigg|_1^{\frac{3}{2}} = \frac{79}{24}$$

+ Tương tự có: $S_{BCD} = 79/24$.

+ Vậy $S_{ABC} = \frac{79}{12}$

**Bài 2.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ và hai tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại hai tiếp điểm có hoành độ lần lượt là 1 và 4.

**Bài 3.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = |x^2 - 1|$, $y = |x| + 5$.

**Bài 4.** Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = 4 - |x|$ và parabal $y = \frac{1}{2}x^2$.

### 1.2.3. Tích phân suy rộng

**Bài 1.** Xét sự hội tụ và tính tích phân suy rộng sau

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$$

**Hướng dẫn giải**

- Xét sự hội tụ

+ Viết tích phân dưới dạng:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$$
$$= \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} + \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} + \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9}$$
$$= I_1 + I_2 + I_3$$

+ Tích phân $I_2$ là tích phân xác định nên hội tụ

+ Xét $I_1 = \int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

+ Đặt $f(x) = \frac{1}{x^2+4x+9}$. Chọn $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Hai hàm số $f(x), g(x)$ không âm trong $(-\infty, 1]$. Có $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

+ Mặt khác tích phân $\int_{-\infty}^{-1} g(x)dx = \int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2} dx$hội tụ $(\alpha = 2 > 1)$ nên tích phân $\int_{-\infty}^{-1} f(x)dx$ hội tụ hay $I_1$ hội tụ.

+ Xét $I_3$ tương tự như $I_1$, cũng nhận được kết quả $I_3$ hội tụ.

+ Vậy $I = I_1 + I_2 + I_3$ hội tụ.

- Tính

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 4x + 9} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)^2 + (\sqrt{5})^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} arctan \frac{x+2}{\sqrt{5}}\bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}$$

**Bài 2.** Xét sự hội tụ và tính tích phân suy rộng:

$$I = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

**Bài 3.** Xét sự hội tụ và tính tích phân suy rộng:

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^4}$$

**Bài 4.** Xét sự hội tụ và tính tích phân suy rộng:

$$I = \int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$$

**Bài 5.** Xét sự hội tụ và tính tích phân suy rộng:

$$I = \int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)}}$$

**Hướng dẫn giải**

- Xét sự hội tụ

+ Viết $I$ dưới dạng:

$$I = \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)}} + \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x(1 - x)}} = I_1 + I_2$$

+ Xét $I_1$: Đặt $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$. Chọn $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. Hai hàm số $f(x), g(x)$ không âm trong $\left(0, \frac{1}{2}\right]$. Có $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

+ Mặt khác $\int_0^{\frac{1}{2}} g(x)dx = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ hội tụ $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$. Do đó, $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ hội tụ hay $I_1$ hội tụ.

+ Xét $I_2$: Đặt $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$. Chọn $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Hai hàm số $f(x), g(x)$ không âm trong $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Có $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

+ Mặt khác $\int_{\frac{1}{2}}^{1} g(x)dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$ hội tụ $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$. Do đó, $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$ hội tụ hay $I_2$ hội tụ.

+ Vậy $I = I_1 + I_2$ hội tụ.

- Tính

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} = \int_0^1 \frac{2dx}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = arc\sin(2x-1)\Big|_0^1$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

**Bài 6.** Xét sự hội tụ và tính tích phân

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

**Bài 7.** Xét sự hội tụ và tính tích phân

$$I = \int_0^1 \frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

## 2. HÀM SỐ NHIỀU BIẾN SỐ THỰC

### 2.1. Đạo hàm, vi phân hàm nhiều biến

**Bài 1.** Tính $\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ và $\overrightarrow{gradu}$ tại $M_0 = (1,2,1)$ biết hàm $u = x^2 + y^2 - \frac{2}{3}z^3$ và $\vec{l} = \overrightarrow{M_0M_1}$, $M_1 = (2,0,3)$

**Hướng dẫn giải**

+ Ta có:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \frac{\partial u}{\partial z} = -2z^2$$

+ Từ giả thiết:

$$\vec{l} = \overrightarrow{M_0M_1} = (1;-2;2) \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}; \cos\beta = -\frac{2}{3}; \cos\gamma = \frac{2}{3}$$

+ Tính được

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_0) = 2; \frac{\partial u}{\partial y}(M_0) = 4; \frac{\partial u}{\partial z}(M_0) = -2 \Rightarrow \overrightarrow{gradu}(M_0) = (2;4;-2)$$

+ Vậy

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}(M_0) = \frac{2}{3} - \frac{8}{3} - \frac{4}{3} = -\frac{10}{3}$$

**Bài 2.**Cho hàm số ẩn $z = z(x,y)$ xác định bởi $x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$. Tìm $z'_x, z'_y$.

**Hướng dẫn giải**

+ Đặt $F(x,y,z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0$

+ Từ đó suy ra :

$$F'_x = 3x^2 - 3yz; F'_y = 6y^2 - 3xz - 2; F'_z = 3z^2 - 3xy$$

+ Vậy :

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = \frac{3yz - 3x^2}{3z^2 - 3xy} = \frac{yz - x^2}{z^2 - xy}$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3xy - 3z^2}$$

**Bài 3.** Cho hàm số $z = e^{x+y}\sin(x-y)$ tính $dz(0,0)$ và

$$A = z.z''_{xx} - (z'_x)^2 - z.z''_{yy} + (z'_y)^2$$

**Bài 4.**Cho hàm số $u(x,y) = x.y.\ln(x+y)$. Tính

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

**Bài 5.** Cho hàm số $z = \frac{x^2}{2y} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$. Chứng minh rằng $x^2 z'_x + y^2 z'_y = \frac{x^3}{y}$

**Bài 6.**Xét tính liên tục tại điểm (0;0) của hàm số theo a:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(x^2-y^2)}{x^4+y^4} khi\ (x;y)\neq(0;0)\\ a \qquad\qquad khi(x;y)=(0;0)\end{cases}$$

**Hướng dẫn giải**

+ Ta có $f(0;0)=a$

+ Xét dãy điểm $M_n(\frac{1}{n};\frac{1}{n})\to(0;0)(n\to+\infty)$, khi đó $f(M_n)\to 0(n\to+\infty)$

+ Xét dãy điểm $N_n\left(\frac{2}{n};\frac{1}{n}\right)\to(0;0)(n\to+\infty), k$hi đó $f(N_n)\to\frac{12}{17}(n\to+\infty)$

+ Vậy không tồn tại giới hạn của $f(x,y)$ khi $(x;y)\to(0;0)$ nên không tồn tại giá trị của a để hàm số liên tục.

**Bài 7.**Xét tính liên tục của hàm số sau theo a

$$f(x,y)=\begin{cases}cos\left(\dfrac{xy-y^2}{x^2+y^2}\right) khi(x,y)\neq(0,0)\\ a \qquad\qquad khi(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

**Bài 8.**Chứng minh rằng hàm số $z=yf(x^2-y^2)$ với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm liên tục thỏa mãn đẳng thức $\frac{1}{x}z_x^{'}+\frac{1}{y}z_y^{'}-\frac{z}{y^2}=0$.

**Bài 9.** Dùng vi phân toàn phần tính gần đúng

$$I=\sqrt{(1{,}02)^3+(1{,}97)^3}$$

**Bài 10.**Tìm hàm số $z=z(x,y)$ biết rằng $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x^2+y^2}{x}$ và $z(x,y)=sin\,y$ khi $x=1$.

### 2.2. Bài toán cực trị

**Bài 1.** Tìm cực trị của hàm $z(x,y)=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$

**Hướng dẫn giải**

+ Tìm điểm tới hạn $\begin{cases}z_x^{'}=4x^3-4x+4y=0(1)\\ z_y^{'}=4y^3+4x-4y=0(2)\end{cases}$

+ Lấy (1) + (2) được: $x^3+y^3=0\Leftrightarrow x=-y$

+ Thay vào (1) được: $4x^3-8x=0\Leftrightarrow x=0,\pm\sqrt{2}$

+ Vậy có 3 điểm tới hạn $M_1(0,0), M_2(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ và $M_3(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

+ Đạo hàm cấp 2: $A = z''_{x^2} = 12x^2 - 4, B = z''_{xy} = 4, C = z''_{y^2} = 12y^2 - 4$

+ Tại $M_2, M_3$: $A^2 - BC = -384 < 0, A = 20 > 0$. Vậy $M_2$ và $M_3$ là các điểm cực tiểu.

+ Tại $M_1$: với M(k,k) thì $z(M) - z(M_1) = 2k^4 \geq 0, \forall k$ trong khi với M(k,0) thì $z(M) - z(M_1) = k^2(k^2 - 2) < 0, \forall k \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Vậy $M_1$ không là điểm cực trị.

+ Kết luận: hàm số có hai điểm cực tiểu $M_2(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), M_3(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

**Bài 2.** Tìm cực trị của hàm $z(x,y) = e^x\left(y^2 + xy + \frac{x}{2}\right)$

**Bài 3.**Tìm cực trị của hàm $z(x,y) = x^2y^2 - 4xy + x^2 - 4x$

**Bài 4.** Tìm cực trị của hàm $z(x,y) = 4xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

**Bài 5.** Tìm cực trị của hàm số $f(x,y) = 8x - x\sqrt{y-1} + x^3 + \frac{1}{2}y - 12x^2$

### 2.3. Tích phân bội

**Bài 1.** Tính tích phân $I = \iint_D x^2(x^2 + y^2)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

**Hướng dẫn giải**

+ Vẽ hình xác định miền lấy tích phân $D = \{(x,y): x^2 + y^2 \leq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$

+ Đổi biến tọa độ cực: $\begin{cases} x = r.\cos\varphi \\ y = r.\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J(r,\varphi) = r$

+ Miền D thành $D'$: $0 \leq r \leq \sqrt{2}, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

+ $I = \int_0^{\sqrt{2}} dr \int_0^{\pi/2} r^5 \cos^2\varphi \, d\varphi = \int_0^{\sqrt{2}} r^5 dr \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi \, d\varphi$

$$= \frac{r^6}{6}\bigg|_0^{\sqrt{2}} . \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{3}$$

**Bài 2.** Tính tích phân $\iiint_V xy^2 dV$ với V là miền giới hạn bởi mặt paraboloid elliptic $z = x^2 + y^2$ và mặt phẳng $z = 4$.

**Hướng dẫn giải**

+ Vẽ miền lấy tích phân V

+ Hình chiếu D của V trên mặt phẳng Oxy là hình tròn tâm O, bán kính bằng 2

+ Miền $V = \{(x,y,z): (x,y) \in D, x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$

+ Đổi biến sang tọa độ trụ

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases};J(r,\varphi,z) = r$$

+ Miền $V' = \{(r,\varphi,z): 0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le r \le 2; r^2 \le z \le 4\}$

+ Ta có

$$I = \iiint_{V'} r^4.\cos\varphi.\sin^2\varphi\, drd\varphi dz$$

$$= \int_0^2 r^4 dr \int_{r^2}^2 dz \times \left(\frac{\sin^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{2\pi} = 0$$

**Bài 3.** Tính tích phân $\iiint_V z(y+2)\,dxdydz$ với V là miền giới hạn bởi mặt trụ $x^2 + y^2 = 4$ và các mặt phẳng $z = 0, z = 2$.

Bài 4. Tính tích phân $I = \iint_D x^2(x^2 + y^2)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 2$ nằm trong góc phần tư thứ nhất.

**Bài 5.** Tính tích phân $I = \iint_D (x - 2y)dxdy$ với D là miền giới hạn bởi các đường $y = x^3,\ x + y = 2$ và trục tung.

**Bài 6.**Tính tích phân của hàm số $f(x,y,z) = 1 - x - y - z$trên miền giới hạn bởi mặt phẳng $x + y + z = 1$ và các mặt phẳng tọa độ, nằm trong góc phần tám thứ nhất.

**Bài 7.**Tính thể tích của miền V giới hạn bởi $1 - 2z \le x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

**Hướng dẫn giải**

+ V là miền giới hạn bởi hai hình cầu: $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \ge 2$ và $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$

+ Miền V được xác định bởi:

$$1 - \sqrt{2 - x^2 - y^2} \le z \le \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

+ Hình chiếu V xuống mặt phẳng Oxy là miền D: $x^2 + y^2 \le 1$

+ Ta có

$$I = \iint_D dxdy \int_{1-\sqrt{2-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz$$
$$= \iint_D \left(\sqrt{1-x^2-y^2} + \sqrt{2-x^2-y^2} - 1\right) dxdy$$

+ Chuyển sang tọa độ cực $\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J = r$

+ Miền D: $x^2 + y^2 \le 1 \Rightarrow D'{:}\, 0 \le r \le 1, 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$I = \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} r\left(\sqrt{1-r^2} + \sqrt{2-r^2} - 1\right) d\varphi$$
$$= 2\pi\left(-\frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

**Bài 8.** Tính diện tích phần mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$nằm ở phía trên mặt phẳng Oxy bị cắt bởi mặt trụ

**Bài 9.**Tìm thể tích vật thể nằm trong góc phần tám thứ nhất giới hạn bởi các mặt paraboloid $z = x^2 + 3y^2$, mặt phẳng $z = 0$, mặt trụ $y = x^2$ và $y = x$

**Bài 10.** Tính thể tích của vật thể giới hạn bởi các mặt cong $z = x^2 + y^2; z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

## 2.4. Tích phân đường

**Bài 1.** Tính tích phân $I = \oint_C 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$ trong đó C là biên của tam giác ABC lấy theo chiều dương với A(1,1), B(2,2), C(1,3).

**Hướng dẫn giải**

+ Ta có:

$$I = \int_{AB} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy + \int_{BC} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$$
$$+ \int_{CA} 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$$
$$= I_1 + I_2 + I_3$$

+ Đường thẳng AB: $y = x$ có$I_1 = \int_1^2 8x^2 dx = \frac{56}{3}$

+ Đường thẳng BC: $y = -x + 4$ ta có $I_2 = 4\int_2^1 (x^2 - 4x + 7)dx = \frac{-40}{3}$

+ Đường thẳng CA: $x = 1$ ta có$I_3 = \int_3^1 (1 + y)^2 dy = \frac{-56}{3}$

+ Kết quả: $I = \frac{-40}{3}$.

**Bài 2.**Tính tích phân $I = \oint_L (x^2 + xy^2)dx + (3y + 2x^2y)dy$trong đó L là biên của miền giới hạn bởi các đường $x = 0, y = 0, y = 2 - x$.

**Hướng dẫn giải**

+ Vẽ các đường lấy tích phân
+ L là một đường cong kín, xác định một miền D hình tam giác
+ Miền $D = \{(x, y): 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2 - x\}$

+ Đặt $\begin{cases} P(x, y) = x^2 + xy^2 \\ Q(x, y) = 3y + 2x^2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_y' = 2xy \\ Q_x' = 4xy \end{cases}$

+ Áp dụng công thức Green, ta được: $I = \iint_D \left(Q_x' - P_y'\right)dxdy = \iint_D 2xydxdy$

+ Ta có

$$I = \int_0^2 2xdx \int_0^{2-x} ydy = \frac{4}{3}$$

**Bài 2.**Tính $I = \int_{OAB} (\cos y - 1)e^x dx + (2y - \sin y)e^x dy$ trong đó OAB là đường gấp khúc O(0,0), A(1,1), B(2,0).

**Bài 3.** Tính tích phân $I = \oint_L (2xy + x^2)dx + (3y^2 + 2xy)dy$ , trong đó L là biên của miền giới hạn bởi $y = 0, y = 2x, x = 2$.

**Bài 4.**Tính tích phân $I = \int_C \frac{ds}{x-y}$trong đó C là đoạn thẳng $y = \frac{x}{2} - 2$ nằm giữa các điểm A(0,-2) và B(4,0).

**Hướng dẫn giải**

+ Vẽ hình

+ Ta có $ds = \sqrt{1 + y'(x)^2}dx = \frac{\sqrt{5}}{2}dx$

$$I = \int_C \frac{ds}{x - y} = \int_0^4 \frac{\sqrt{5}}{2\left(\frac{x}{2} + 2\right)}dx$$

+ $I = \sqrt{5}\ln 2$

**Bài 5.**Tính độ dài cung $\begin{cases} x = t + \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$ với $0 \le t \le \pi$

**Bài 6.** Tính tích phân$I = \int_C \sqrt{x^2 + y^2}ds$ trong đó C là đường xoắn hình nón $x = t\cos t, y = t\sin t, z = t$ với $0 \le t \le t_0$.

### 2.5. Tích phân mặt

**Bài 1.** Tính tích phân $\iint_S 2xdxdy + ydzdx - zdydz$với (S) là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

## Hướng dẫn giải

+ Vẽ mặt cong (S)
+ (S) và một mặt cong kín, xác định một miền V là hình cầu tâm O, bán kính bằng 2, hướng của mặt là phía ngoài.

+ Với $P(x,y,z) = -z, Q(x,y,z) = y, R(x,y,z) = 2x$, ta có $P_x' = 0, Q_y' = 1, R_z' = 0$

+ Áp dụng công thức Ostrogradsky, ta được $I_3 = \iiint_V \left(P_x' + Q_y' + R_z'\right) dxdydz$

+ $I = \iiint_V dxdydz$ =thể tích khối cầu tâm O, bán kính 2. Vậy$I = \frac{32\pi}{3}$

**Bài 2.** Tính tích phân $\iint_S x^2 dydz - y^2 dzdx + 2yzdxdy$ với (S) là nửa mặt cầu $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, hướng của (S) là hướng lên trên.

**Bài 3.** Tính tích phân $\iint_S 2xdxdy - ydzdx + zdydz$ với (S) là phía ngoài mặt cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

**Bài 4.**Tính tích phân $I = \iint_S \ln z \, \mathrm{dS}$ trong đó S là mặt cầu xác định bởi $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \frac{1}{2} \le z \le 1$

## Hướng dẫn giải

+ Mặt S có phương trình $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ với hình chiếu của S xuống mặt phẳng Oxy là miền D giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$.

+ $dS = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dxdy = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy$

+ $I = \iint_D \frac{\ln \sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dxdy$

+ Chuyển sang tọa độ cực $\begin{cases} x = r.\cos\varphi \\ y = r.\sin\varphi \end{cases} \Rightarrow J(r,\varphi) = r$

+ Miền D:$x^2 + y^2 \le \frac{3}{4} \Rightarrow D'$: $0 \le r \le \frac{\sqrt{3}}{2}, 0 \le \varphi \le 2\pi$

+ Thay vào tính được $I = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\ln \sqrt{1-r^2}}{\sqrt{1-r^2}} rdr \times \int_0^{2\pi} d\varphi = \pi(\ln 2 - 1)$

**Bài 5.**Tính tích phân $I = \iint_S x^2 y^2 z dS$ trong đó S là mặt nón $x^2 + y^2 = z^2, 0 \le z \le 1$.

**Bài 6.**Tính diện tích của phần mặt paraboloid $z = xy$ với hình chiếu xuống mặt phẳng Oxy là hình tròn xác định bởi $x^2 + y^2 \le 1$.

**Bài 7.**Tính khối lượng của mặt $z = 2 - \frac{x^2+y^2}{2}, z \geq 0$ biết khối lượng riêng tại điểm M(x,y,z) của mặt là $\rho(x, y, z) = z$.

## 3. LÝ THUYẾT CHUỖI

### 3.1. Chuỗi số

**Bài 1.** Xét sự hội tụ của chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n - n}{5^n + 4n + 1}$$

**Hướng dẫn giải**

+ Ta có $\lim_{x\to\infty} \frac{3^n-n}{5^n+4n+1} : \frac{3^n}{5^n} = 1$ khi $n \to \infty$

+ Suy ra $\frac{3^n-n}{5^n+4n+1} \sim \frac{3^n}{5^n}$ khi $n \to \infty$

Mà $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n$ hội tụ.

+ Theo tiêu chuẩn so sánh chuỗi đã cho hội tụ

**Bài 2.** Xét sự hội tụ của chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 + cos\, n\, \pi}{n^2}$$

**Bài 3.**Xét sự hội tụ của chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! + 1}{n^n + 1}$$

**Bài 4.** Xét sự hội tụ của chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n + 3}{n!\, 6^n + 4}$$

**Bài 5.**Xét sự hội tụ của chuỗi số:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

## 3.2. Chuỗi hàm số

**Bài 1.** Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{n^2(n^2+1)}$$

**Hướng dẫn giải**

+ Đặt $x-2=X$ ta được chuỗi $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{X^n}{n^2(n^2+1)}$ (1) với $a_n = \frac{1}{n^2(n^2+1)}$

+ Bán kính hội tụ của (1): $l = lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \Rightarrow R = \frac{1}{l} = 1$. Vậy chuỗi (1) hội tụ trong (-1;1) và phân kì ngoài đoạn [-1;1].

+ Tại $X = 1$:

Chuỗi đã cho trở thành $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(n^2+1)}$ có số hạng tổng quát $u_n$

$$= \frac{1}{n^2(n^2+1)}$$

Ta thấy $\lim\left(\frac{u_n}{v_n}\right) = 1$ với $v_n = \frac{1}{n^4}$ mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$hội tụ nên chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ theo dấu hiệu so sánh.

+ Tại $X = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n^2+1)}$ là chuỗi đan dấu hội tụ theo tiêu chuẩn Leibniz.

+ Vậy miền hội tụ của (1) là [-1;1]$\Rightarrow$ miền hội của chuỗi đã cho là [1;3]

**Bài 2.** Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n.\sqrt{n}}$$

**Bài 3.** Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^n}{\sqrt{1+n^2}}$$

**Bài 4.** Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừa

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-2)^{3n}}{n\sqrt{n+1}}$$

**Bài 5.**Tìm miền hội tụ của chuỗi lũy thừavà tính tổng của chuỗi tại $x = 0$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+1)^n}{n(n+2)}$$

## 4. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

### 4.1. Phương trình vi phân cấp một

**Bài 1.**Giải phương trình vi phân cấp 1

$$xydx - (1+y^2)(1+x^2)dy = 0$$

**Hướng dẫn giải**

+ Với $y \neq 0$ phương trình trở thành

$$\frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1+y^2}{y}dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}.\frac{1}{1+x^2}d(1+x^2) = \left(\frac{1}{y}+y\right)dy$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}ln(1+x^2) = ln|y| + \frac{y^2}{2} + C$$

Ta thu được nghiệm dưới dạng tích phân tổng quát.

$+y = 0$ thay vào phương trình thấy thỏa mãn. Vậy $y = 0$là nghiệm kì dị.

**Bài 2.** Tìm nghiệm của phương trình vi phân: $(x-y)dx + xdy = 0$ thỏa mãn $y(1) = 3$

**Bài 3.** Tìm nghiệm của phương trình: $(y+xy)dx + (x-xy)dy = 0$ thỏa mãn $y(3) = \sqrt{5}$

**Bài 4.** Giải phương trình $(1+x^2)e^y dx + x^3(1+e^{2y})dy = 0$

**Bài 5.** Giải phương trình $e^x(2+2x-y^2)dx - 2ye^x dy = 0$

**Bài 6.** Tìm nghiệm riêng của phương trình $x^2y' = y(x+y)$ thỏa mãn điều kiện $y(-2) = 4$.

### 4.2. Phương trình vi phân cấp hai

**Bài 1.** Giải phương trình vi phân $y'' + 4y' - 3x - 1 = 0$

**Hướng dẫn giải**

+ Biến đổi thành: $y'' + 4y' = 1 + 3x$ (1)
+ Phương trình vi phân thuần nhất tương ứng: $y'' + 4y' = 0$ (2)
+ Phương trình đặc trưng: $t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow t = 0, -4$

+ Nghiệm tổng quát của (2) là: $y(x) = C_1 + C_2 e^{-4x}$

+ Tìm nghiệm riêng của (1) có dạng: $y *= x(ax + b)$
+ Tính y*', y*'' thay vào (1) tìm được $a = -\frac{3}{8}, b = -\frac{7}{16}$

+ Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y(x) = -\frac{3}{8}x^2 - \frac{7}{16}x + C_1 + C_2 e^{4x}$$

**Bài 2.** Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y'' + 3y' + 2y = 2 + 4x^2$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = 0, y'(0) = 1$.

**Hướng dẫn giải**

+ Phương trình đặc trưng: $k^2 - 3k + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2 \end{array}\right.$

+ Nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

$$\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

+ Do $\alpha = 0$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng, suy ra ìm nghiệm riêng dạng: $y_* = Ax^2 + Bx + C$

+ Tính được $y_*', y_*''$ và thay vào phương trình tìm được $y_* = 2x^2 - 3x + \frac{7}{2}$.
Suy ra nghiệm tổng quát là $y(x) = \overline{y} + y_* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2x^2 - 3x + \frac{7}{2}$.

+ $y(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 + \frac{7}{2} = 0; y'(0) = 0 \Rightarrow c_1 + 2c_2 - 3 = 0$
Suy ra $C_1 = 10, C_2 = \frac{13}{2}$

Vậy nghiệm riêng của phương trình là $y(x) = 10e^x + \frac{13}{2}e^{2x} + 2x^2 - 3x + \frac{7}{2}$.

**Bài 3.** Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y'' + 2y' + 5y = 3x^2 + x$
**Bài 4.** Tìm nghiệm của phương trình vi phân $y'' + 4y' + 4y = (5x + 1)e^x$
**Bài 5.** Tìm nghiệm của phương trình vi phân$y'' + 4y' + 4y = 6x^2$ thỏa mãn điều kiện $y(0) = 1, y'(0) = 2$.

**Bài 6.** Tìm nghiệm phương trình vi phân$y'' + 4y = 4x + 4sin\, x$

## 5. ĐẠI SỐ TUYẾN TÍNH

### 5.1. Ma trận, định thức

**Bài 1.** Xác định ma trận X, biết rằng X thỏa mãn phương trình ma trận sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

**Hướng dẫn giải**

+ Biến đổi phương trình ma trận

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 4 & 8 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

+ Đặt $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ khi đó $(1) \Leftrightarrow A.X = D$

+ Tính $det(A) = 1 \neq 0 \Rightarrow$ tồn tại $A^{-1}$

+ Tìm ma trận phụ hợp:$C_{11} = 1; C_{12} = 1; C_{13} = 1$, $C_{21} = -1; C_{22} = 0; C_{23} = 1$, $C_{13} = 1; C_{32} = -1; C_{33} = -2$.

+ Vậy $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow X = A^{-1}.D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$

**Bài 2.** Tìm ma trận X thỏa mãn $X.A - 2.B - C = 0$ trong đó

A=$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ và $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**Bài 3.** Xác định ma trận X, biết rằng X thỏa mãn phương trình ma trận sau

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.X = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

**Bài 4.** Xác định ma trận X, biết rằng X thỏa mãn phương trình ma trận sau

$$X.\begin{pmatrix}9 & 7 & 6\\1 & 1 & 2\\1 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & -1\\-2 & 1 & 0\\-3 & -1 & 2\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

## 5.2. Hệ phương trình tuyến tính

**Bài 1.** Giải biện luận hệ phương trình sau

$$\begin{cases}x_1-6x_2-9x_3-20x_4=-11\\2x_1+3x_2+6x_3+8x_4=5\\3x_1+2x_2+5x_3+4x_4=3\\4x_1+x_2+4x_3+\lambda x_4=2\end{cases}$$

**Hướng dẫn giải**

+ Ma trận bổ sung

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}1 & -6 & -9 & -20 & -11\\2 & 3 & 6 & 8 & 5\\3 & 2 & 5 & 4 & 3\\4 & 1 & 4 & \lambda & 2\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{H_2-2H_1\to H_2\\H_3-3H_1\to H_3\\H_4-4H_1\to H_4}]{}\begin{pmatrix}1 & -6 & -9 & -20 & -11\\0 & 15 & 24 & 48 & 27\\0 & 20 & 32 & 64 & 36\\0 & 25 & 40 & 80+\lambda & 46\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{\frac{1}{3}H_2\to H_2\\\frac{1}{4}H_3\to H_3}]{}\begin{pmatrix}1 & -6 & -9 & -20 & -11\\0 & 5 & 8 & 16 & 9\\0 & 5 & 8 & 16 & 9\\0 & 25 & 40 & 80+\lambda & 46\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{H3-H_2\to H_3\\H_4-5H_2\to H_4}]{}\begin{pmatrix}1 & -6 & -9 & -20 & -11\\0 & 5 & 8 & 16 & 9\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & \lambda & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[H_3\leftrightarrow H_4]{}\begin{pmatrix}1 & -6 & -9 & -20 & -11\\0 & 5 & 8 & 16 & 9\\0 & 0 & 0 & \lambda & 1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

+ Nếu $\lambda\neq 0$ hệ trở thành

$$\begin{cases}x_1-6x_2-9x_3-20x_4=-11\\5x_2+8x_3+16x_4=9\\\lambda x_4=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_3\in\mathbb{R}\\x_4=1/\lambda\\x_2=\dfrac{9}{5}-\dfrac{16}{5}m-\dfrac{8}{5}x_3\\x_1=-\dfrac{1}{5}+\dfrac{4}{5}\lambda-\dfrac{3}{5}x_3\end{cases}$$

+ Nếu $\lambda=0$ thì hệ vô nghiệm.

**Bài 2.** Giải biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 4x_1 + 3x_2 + m.x_3 + x_4 = -5 \end{cases}$$

**Bài 3.** Giải biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = k \\ m.x_1 - 4x_2 + 9.x_3 + 10.x_4 = 11 \end{cases}$$

**Bài 4.** Giải biện luận hệ phương trình sau theo tham số m

$$\begin{cases} x_1 - 7x_2 - x_3 + 2x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 + mx_4 = 1 \end{cases}$$

***Hà Nội*, ngày 15 tháng 5 năm 2020**

**Lãnh đạo Khoa KHCB & NN**

**Thượng tá, TS. Nguyễn Quang An**